Cette note a pour but de compléter un argument de l'article [**4**]. Il concerne l'établissement de la suite spectrale (4.34). Je remercie Christophe Breuil de m'avoir signalé ce point.

Rappelons le contexte. On considère $\underline{G}$ un groupe réductif connexe sur $\mathbb{Q}_p$ ainsi que $\underline{P} \subset \underline{G}$ un sous-groupe parabolique. On note $\underline{N}$ son radical unipotent ainsi que $\underline{L}$ le quotient $\underline{P}/\underline{N}$. On pose $G = \underline{G}(\mathbb{Q}_p)$, $P = \underline{P}(\mathbb{Q}_p)$, $N = \underline{N}(\mathbb{Q}_p)$ et $L = \underline{L}(\mathbb{Q}_p)$ qui est isomorphe à P/N. Si H est un groupe de Lie p-adique (par exemple l'un des groupes précédents), on note $D(H)$ l'algèbre des distributions sur H à valeurs dans un corps K, extension finie de $\mathbb{Q}_p$ et $\mathcal{M}(H)$ la catégorie des $D(H)$-modules. Par abus de langage, on désigne par K le $D(N)$-module trivial. Si M_1 est un $D(L)$-module et M_2 un $D(P)$-module, on a une suite spectrale ([**4**, (4.34)])

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}^p_{\mathcal{M}(L)}(M_1, \mathrm{Ext}^q_{\mathcal{M}(N)}(K, M_2)) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_{\mathcal{M}(P)}(M_1, M_2).$$

Soit $\mathrm{Oub}_{P,N}$ le foncteur d'oubli de la catégorie $\mathcal{M}(P)$ vers la catégorie $\mathcal{M}(N)$. Pour établir cette suite, on utilise en effet de façon implicite le fait que, pour tout $i \geq 0$, le i-ème foncteur dérivé du foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}(N)}(K, \mathrm{Oub}_{P,N}(-))$ coïncide avec le foncteur $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{M}(N)}(K, \mathrm{Oub}_{P,N}(-))$. Il faut donc prouver le résultat suivant.

Proposition 0.1. — *Si $\mathcal{F}$ désigne le foncteur $M \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}(N)}(K, M)$ de la catégorie des $D(P)$-modules vers la catégorie des $D(L)$-modules, on a, pour tout $D(P)$-module M, un isomorphisme de K-espaces vectoriels*

$$R^i\mathcal{F}(M) \simeq \mathrm{Ext}^i_{D(N)}(K, M).$$

Démonstration. — Comme $\mathcal{F}$ est le composé du foncteur d'oubli $\mathrm{Oub}_{P,N}$ avec le foncteur $\mathrm{Hom}_{D(N)}(K, -)$, et que le foncteur $\mathrm{Oub}_{P,N}$ est exact, il suffit de vérifier que ce dernier transforme un objet injectif de $\mathcal{M}(P)$ en un objet $\mathrm{Hom}_{D(N)}(K, -)$-acyclique de $\mathcal{M}(N)$. Autrement il faut prouver que si M est un $D(P)$-module injectif, on a $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{M}(N)}(K, M) = 0$ pour $i > 0$. Si H est un groupe de Lie p-adique et H_0 est un sous-groupe compact ouvert de H, on note $\Lambda(H) = K[H] \otimes_{\mathcal{O}_K[H]} \mathcal{O}_K[[H_0]]$. À isomorphisme canonique près, cette K-algèbre ne dépend pas du choix de H_0. De plus, si P est compact, on a $\Lambda(P) = K \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_K[[P]]$. D'après [**3**, Thm. 5.2], le $\Lambda(H_0)$-module (à gauche comme à droite) $D(H_0)$ est plat, ainsi $D(H)$ est un $\Lambda(H)$-module plat (à gauche ou à droite).

Soit P_0 un sous-groupe compact ouvert de P et $N_0 = N \cap P_0$. Le sous-groupe N_0 est compact et ouvert dans N. De plus, on a isomorphisme de $\Lambda(P_0)$-modules à droite

$$\Lambda(P) \simeq K[P/P_0] \otimes_K \Lambda(P_0)$$

qui prouve que $\Lambda(P)$ est un $\Lambda(P_0)$-module plat. D'après le lemme 0.2 ci-dessous, $\Lambda(P_0)$ est un $\Lambda(N_0)$-module plat, et donc $\Lambda(P)$ est un $\Lambda(N_0)$-module plat. Or on peut trouver une famille (P_n) de sous-groupes compacts ouverts de P telle que $(N_n := N \cap P_n)$ forme une suite croissante de sous-groupes compacts ouverts de N telle que $N = \bigcup_n N_n$ (voir par exemple [**1**, §4.1]). On vérifie facilement que l'application naturelle $\varinjlim_n \Lambda(N_n) \xrightarrow{\sim} \Lambda(N)$ est un isomorphisme. Comme $D(P)$ est un $\Lambda(N_n)$-module plat pour tout n, c'est un $\Lambda(N)$-module plat. Comme le foncteur d'oubli de la catégorie des $D(P)$-modules vers la catégorie des $\Lambda(N)$-modules est adjoint à droite du foncteur $D(H) \otimes_{\Lambda(N)} -$, tout $D(P)$-module injectif est aussi un $\Lambda(N)$-module injectif.

Soit S un $\Lambda(N)$-module. Comme $D(N)$ est un $\Lambda(N)$-module plat, on a, pour tout $D(N)$-module M, et tout $i \geq 0$, un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{M}(N)}(D(N) \otimes_{\Lambda(N)} S, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^i_{\Lambda(N)-\mathrm{Mod}}(S, M).$$

En particulier, si M est un $D(P)$-module injectif, on en déduit que $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{M}(N)}(D(N) \otimes_{\Lambda(N)} S, M) = 0$ pour $i > 0$. On conclut alors en remarquant que si K est le $\Lambda(N)$-module trivial, alors $D(N) \otimes_{\Lambda(N)} K = K$. En effet, $D(N) \otimes_{\Lambda(N)} K = D(N_0) \otimes_{\Lambda(N_0)} K$ est un $D(N_0)$-module coadmissible, il a donc une structure canonique d'espace de Fréchet et contient un sous-K-espace vectoriel dense de dimension 1. $\square$

Lemme 0.2. — *Soient H un groupe de Lie p-adique compact, H' un sous-groupe fermé. Alors $\mathcal{O}_K[[H]]$ est un $\mathcal{O}_K[[H']]$-module plat (à gauche ou à droite). En particulier $\Lambda(H)$ est un $\Lambda(H')$-module plat.*

Démonstration. — Soit I un idéal de type fini de $\mathcal{O}_K[[H']]$. Il suffit de prouver que l'application $\mathcal{O}_K[[H]] \otimes_{\mathcal{O}_K[[H']]} I \to \mathcal{O}_K[[H]]$ est injective. Comme l'anneau $\mathcal{O}_K[[H']]$ est noethérien, l'idéal I est en fait un $\mathcal{O}_K[[H']]$-module de présentation finie. On en conclut que $\mathcal{O}_K[[H]] \otimes_{\mathcal{O}_K[[H']]} I$ est le conoyau d'une application linéaire continue entre deux $\mathcal{O}_K[[H]]$-modules libres de type fini donc compacts, il est donc séparé et complet pour la topologie quotient et isomorphe au $\mathcal{O}_K[[H]]$-module $\mathcal{O}_K[[H]]\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_K[[H']]}I$. Il existe un isomorphisme de variétés analytiques p-adiques $(H/H') \times H' \xrightarrow{\sim} H$ (car il existe une section continue à la projection $H \to H/H'$) qui implique l'existence d'un isomorphisme $\mathcal{O}_K[[H/H']]\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_K}\mathcal{O}_K[[H']] \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_K[[H]]$, où $\mathcal{O}_K[[H/H']]$ désigne le $\mathcal{O}_K$-module compact des fonctions continues de H/H' dans $\mathcal{O}_K$, ainsi qu'un isomorphisme $\mathcal{O}_K[[H]]\otimes_{\mathcal{O}_K[[H']]}I \simeq \mathcal{O}_K[[H/H']]\hat{\otimes}_{\mathcal{O}_K}I$. D'après [**2**, Prop. 3.1], le foncteur $\mathcal{O}_K[[H/H']]$ est exact sur les suites exactes courtes de $\mathcal{O}_K$-modules profinis. On applique ce résultat à la suite $0 \to I \to \mathcal{O}_K[[H']] \to \mathcal{O}_K[[H']]/I \to 0$ ce qui permet de conclure. $\square$

Il reste peut-être à préciser pourquoi $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}(N)}(K, M)$ est muni d'une structure de $D(L)$-module lorsque M est un $D(P)$-module. En effet, l'espace $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}(N)}(K, M)$ s'identifie à un sous-K-espace vectoriel de M sur lequel l'action de $D(P)$ se factorise par $D(P) \otimes_{D(N)} K$ qui est isomorphe à $D(L)$.

Références

[1] M. Emerton, « Jacquet modules of locally analytic representations of p-adic reductive groups I. Construction and first properties », *Ann. sci. É.N.S.* **39** (2006), p. 775–839.

[2] J.-M. Fontaine, « Groupes p-divisibles sur les corps locaux », *Astérisque* **47-48** (1977).

[3] P. Schneider & J. Teitelbaum , « Algebras of p-adic distributions and admissible representations », *Invent. Math.* **153** (2003), 145–196.

[4] B. Schraen, « Représentations localement analytiques de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ », *Ann. sci. É.N.S.* **44** (2011), 43–145.

Benjamin Schraen • *E-mail :* `benjamin.schraen@polytechnique.edu`