

3. VARIÉTÉS ALGÈBRIQUES PROJECTIVES

3.1. Espaces projectifs.

Définition 3.1. Soit k un corps et soit E un k -espace vectoriel de dimension finie. L'ensemble $\mathbb{P}(E)$ des droites vectorielles de E est appelé espace projectif associé à E . Par convention, l'espace projectif associé à l'espace vectoriel nul est l'ensemble vide : $\mathbb{P}(0) = \emptyset$.

On définit une relation d'équivalence sur $E \setminus \{0\}$:

$$x \sim y \Leftrightarrow kx = ky \Leftrightarrow \exists a \in k^\times, y = ax$$

On note p l'application $x \mapsto kx$ de $E \setminus \{0\}$ vers $\mathbb{P}(E)$. Elle induit une bijection de $(E \setminus \{0\}) / \sim$ sur $\mathbb{P}(E)$.

Par convention, la dimension de l'espace projectif $\mathbb{P}(E)$ est $\dim_k E - 1$ et on note $\mathbb{P}_k^n := \mathbb{P}(k^{n+1})$.

Définition 3.2. Un sous-espace projectif de $\mathbb{P}(E)$ est une partie de la forme $\mathbb{P}(V)$ où V est un sous- k -espace vectoriel de E .

On vérifie qu'une intersection de sous-espaces projectifs est toujours un sous-espace projectif. En effet, pour $(V_i)_{i \in I}$ une famille de sous- k -espaces vectoriels de E , on a

$$\bigcap_{i \in I} \mathbb{P}(V_i) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} V_i\right)$$

On peut donc définir le sous-espace projectif engendré par une partie quelconque de $S \subset \mathbb{P}(E)$. On le note parfois $\mathbb{P}(S)$.

Théorème 3.3. Soient L et L' deux sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(E)$. On a alors

$$\dim L + \dim L' = \dim(L \cap L') + \dim \mathbb{P}(L \cup L')$$

Démonstration. En posant $L = \mathbb{P}(V)$ et $L' = \mathbb{P}(V')$, on a $L \cap L' = \mathbb{P}(V \cap V')$ et $\mathbb{P}(L \cup L') = \mathbb{P}(V + V')$, l'égalité est alors une conséquence immédiate de l'égalité

$$\dim_k V + \dim_k V' = \dim_k(V \cap V') + \dim_k(V + V')$$

□

Corollaire 3.4. Si L et L' sont deux sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(E)$ tels que $\dim L + \dim L' \geq \dim \mathbb{P}(E)$, on a $L \cap L' \neq \emptyset$.

On appelle *droite projective* un espace projectif de dimension 1, plan projectif un espace projectif de dimension 2, etc. En particulier, dans le plan projectif, le corollaire ci-dessus implique que l'intersection de deux droites projectives est toujours non vide.

3.2. Coordonnées homogènes. Soit $\underline{e} = (e_0, \dots, e_n)$ une base de E . On a donc ici $n = \dim \mathbb{P}(E)$. Soit $x \in \mathbb{P}(E)$. On peut noter $x = p(y)$ pour $y \in E$.

Définition 3.5. Un système de coordonnées homogènes de x est un $(n+1)$ -uplet $(x_0, \dots, x_n) \in k^{n+1} \setminus \{0\}$ tel que $x = p(x_0 e_0 + \dots + x_n e_n)$.

Dans une base donnée, il n'y a pas unicité du système de coordonnées homogènes de x . Si $(x_0, \dots, x_n)$ est un système de coordonnées homogènes de x , les autres systèmes de coordonnées homogènes de x sont les $(n+1)$ -uplets $(ax_0, \dots, ax_n)$ où $a \in k^\times$.

On note $(x_0 : \dots : x_n)$ le point de $\mathbb{P}(E)$ dont $(x_0, \dots, x_n)$ est un système de coordonnées homogènes. Pour tout $a \in k^\times$, on a donc

$$(x_0 : \dots : x_n) = (ax_0 : \dots : ax_n)$$

De même, si $a \in k^\times$, remplacer la base $\underline{e}$ par la base $a\underline{e}$ ne change pas les systèmes de coordonnées homogènes associés aux point de $\mathbb{P}(E)$. La base $\underline{e}$ est entièrement déterminée, à homothétie près, par les $n+2$ -points

$$p(e_0), \dots, p(e_n), p(e_0 + \dots + e_n)$$

Ces $(n+2)$ points ont la propriété particulière que $n+1$ quelconques d'entre eux ne sont jamais dans un même hyperplan. Réciproquement, une famille de $n+2$ points vérifiant cette propriété détermine entièrement une classe d'homothétie de bases de E . Il est donc légitime d'introduire la définition suivante.

Définition 3.6. Un repère projectif de $\mathbb{P}(E)$ est la donnée de $n+2$ points tels que $n+1$ -quelconques d'entre eux n'appartiennent jamais à un même hyperplan.

On a en fait démontré le résultat suivant.

Proposition 3.7. L'ensemble des bases de E à homothétie près est en bijection naturelle avec les repères projectifs de $\mathbb{P}(E)$.

En d'autres termes, si on fixe un repère projectif $P_0, \dots, P_{n+1}$ de $\mathbb{P}(E)$, on identifie $\mathbb{P}(E)$ à $\mathbb{P}(k^{n+1})$ de telle sorte que P_i corresponde au point $(0 : \dots : 0 : 1 : 0 : \dots : 0)$ (le 1 étant à la i -ème place) et P_{n+1} au point $(1 : \dots : 1)$.

Exemple 3.8. Un repère projectif de $\mathbb{P}_k^2$ est constitué de 4 points tels que 3 d'entre eux ne sont jamais alignés.

3.3. Homographies. Soit $u \in \text{GL}(E)$ une application linéaire bijective de E sur lui-même. L'automorphisme u induit une permutation $\mathbb{P}(u)$ de $\mathbb{P}(E)$ définie par $kx \mapsto ku(x)$ et appelée *homographie*.

Si u et v sont dans $\text{GL}(E)$, on a $v \circ u \in \text{GL}(E)$ et $\mathbb{P}(v \circ u) = \mathbb{P}(v) \circ \mathbb{P}(u)$ de sorte que l'ensemble G des homographies de $\mathbb{P}(E)$ forme un groupe et que l'application $\mathbb{P} : \text{GL}(E) \rightarrow G$ est un morphisme surjectif de groupes. Si $\dim_k E \geq 2$, on

vérifie aisément que $\mathbb{P}(u) = \text{Id}_{\mathbb{P}(E)}$ si et seulement si u est une homothétie de sorte que le morphisme $\mathbb{P}$ identifie le groupe $\text{PGL}(E) := \text{GL}(E)/k^\times$ au groupe G des homographies de $\mathbb{P}(E)$.

Étudions l'effet des homographies sur les repères projectifs.

Théorème 3.9. *Soient $(P_0, \dots, P_{n+1})$ et $(Q_0, \dots, Q_{n+1})$ deux repères projectifs de $\mathbb{P}(E)$. Il existe une homographie h de $\mathbb{P}(E)$ telle que $h(P_i) = Q_i$ pour $0 \leq i \leq n+1$. Autrement dit le groupe $\text{PGL}(E)$ opère simplement et transitivement sur l'ensemble des repères projectifs de $\mathbb{P}(E)$.*

Démonstration. Il existe une base $\underline{e} = (e_0, \dots, e_n)$ de E telle que $P_i = p(e_i)$ et $P_{n+1} = p(e_0 + \dots + e_n)$. De même il existe une base $\underline{f} = (f_0, \dots, f_n)$ telle que $Q_i = p(f_i)$ et $Q_{n+1} = p(f_0 + \dots + f_n)$. Il existe alors une unique application linéaire $u \in \text{GL}(E)$ telle que $u(e_i) = f_i$ pour $0 \leq i \leq n$. Comme les bases $\underline{e}$ et $\underline{f}$ sont déterminées de façon unique à homothétie près, il en est de même de u . $\square$

Exactement comme en géométrie affine, nous avons deux points de vue équivalents en géométrie projective : changer de repère projectif ou appliquer une homographie.

3.4. Espaces affines et espaces projectifs. Soit $n \geq 1$. Dans l'espace projectif $\mathbb{P}_k^n$, considérons H_0 l'hyperplan défini par l'équation $x_0 = 0$. Si P est un point de $\mathbb{P}_k^n \setminus H_0$, il existe un unique système de coordonnées *affines* $(y_1, \dots, y_n) \in k^n$ tel que

$$P = (1 : y_1 : \dots : y_n)$$

On a donc une bijection entre k^n et $\mathbb{P}_k^n \setminus H_0$ donnée par $(y_1, \dots, y_n) \mapsto (1 : y_1 : \dots : y_n)$.

Par ce procédé on plonge $\mathbb{A}_k^n$ dans $\mathbb{P}_k^n$ en l'identifiant au complémentaire de l'hyperplan H_0 . Pour cette raison, on appelle H_0 *l'hyperplan à l'infini* de $\mathbb{A}_k^n$.

Remarque 3.10. Comme le groupe des homographies d'un espace projectif $\mathbb{P}(E)$ agit transitivement sur les hyperplans projectifs, étant donné un hyperplan H de $\mathbb{P}(E)$, on peut toujours trouver un repère projectif de $\mathbb{P}(E)$ dans lequel H s'identifie à l'hyperplan à l'infini de l'espace affine $\mathbb{A}_k^n$.

Exemple 3.11. — On peut plonger $\mathbb{A}_k^1$ dans $\mathbb{P}_k^1$ par $x \mapsto (1 : x)$. Dans ce cas, le complémentaire de $\mathbb{A}_k^1$ est le point à l'infini $(0 : 1)$. De sorte que

$$\mathbb{P}_k^1 = \mathbb{A}_k^1 \cup \{(0 : 1)\}$$

— Plongeons $\mathbb{A}_k^2$ dans $\mathbb{P}^2 = \{(x : y : z)\}$ via l'application $(x, y) \mapsto (x : y : 1)$. La droite à l'infini, H_∞ est alors l'ensemble $\{(x : y : 0)\}$. Soit D une droite de $\mathbb{A}_k^2$ d'équation $aX + bY + c = 0$ où $(a, b) \neq (0, 0)$. Il existe alors une unique droite projective L de $\mathbb{P}_k^2$ telle que $L \cap \mathbb{A}_k^2 = D$. Il s'agit de la droite

d'équation $aX + bY + cZ = 0$. Calculons l'intersection de L avec la droite à l'infini H_∞

$$\begin{aligned} L \cap H_\infty &= \{(x : y : z), ax + by + cz = 0, z = 0\} \\ &= \{(x : y : 0), ax + by = 0\} \\ &= \{(-b : a : 0)\} \end{aligned}$$

Ainsi L et la droite H_∞ s'intersectent en un unique point. La droite L s'appelle la clôture projective de D . Le calcul qui précède montre que deux droites affines D_1 et D_2 sont parallèles si et seulement si elles ont le même point à l'infini : deux droites parallèles s'intersectent à l'infini !

- Plus généralement si on plonge $\mathbb{A}_k^n$ dans $\mathbb{P}_k^n$ et que l'on note H_∞ son complémentaire dans $\mathbb{P}_k^n$, l'intersection d'un hyperplan projectif $H \neq H_\infty$ avec $\mathbb{A}_k^n$ est un hyperplan affine et tout hyperplan affine de $\mathbb{A}_k^n$ s'obtient de façon unique par ce procédé.

On peut encore essayer de généraliser le dernier exemple en remplaçant les équation linéaires des hyperplans par des équations polynomiales. On entre ainsi dans le cadre de la géométrie algébrique projective. Il faut cependant prendre garde au fait suivant. Si $F \in k[X_0, \dots, X_n]$ est un polynôme, on peut avoir $P(x_0, \dots, x_n) = 0$ mais $P(ax_0, \dots, ax_n) \neq 0$ pour un certain $a \in k^\times$. Cependant, cette mésaventure ne se produit pas lorsque P est un polynôme *homogène* de $k[X_0, \dots, X_n]$, autrement dit lorsque tous ses monômes ont le même degré total. Ce degré est alors appelé le degré du polynôme P . En effet, si P est un polynôme homogène de degré d , on a, pour tout $a \in k$,

$$P(aX_0, \dots, aX_n) = a^d P(X_0, \dots, X_n)$$

3.5. Variétés algébriques projectives. Pour la raison que l'on vient de voir, il est préférable, dans le cas projectif, de se limiter à la considération des objets *homogènes*. On fixe dans tout ce chapitre un corps k algébriquement clos.

Soit $n \geq 1$. Un idéal de $k[X_0, \dots, X_n]$ est dit *homogène* s'il est engendré par des éléments homogènes de $k[X_0, \dots, X_n]$.

Exemple 3.12. L'idéal (X, Y^2) de $k[X, Y]$ est homogène. L'idéal $(X + Y^2)$ ne l'est pas.

Définition 3.13. Soit $I \subset k[X_0, \dots, X_n]$ un idéal homogène. On note $V_p(I)$ la partie de $\mathbb{P}_k^n$ définie par

$$V_p(I) := \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_k^n, \forall F \in I, F(x_0, \dots, x_n) = 0\}$$

Une partie de $\mathbb{P}_k^n$ de la forme $V_p(I)$ est appelée partie algébrique de $\mathbb{P}_k^n$ ou encore variété algébrique projective.

Exactement comme dans le cas affine, on a les propriétés suivante :

- $I \subset J \Rightarrow V_p(J) \subset V_p(I)$
- $V_p(I + J) = V_p(I) \cap V_p(J)$
- $V_p(IJ) = V_p(I \cap J) = V_p(I) \cup V_p(J)$
- $V_p(0) = \mathbb{P}_k^n$ et $V_p(k[X_0, \dots, X_n]) = V_p(X_0, \dots, X_n) = \emptyset$

La seule véritable nouveauté vient de l'égalité $V_p(X_0, \dots, X_n) = \emptyset$ alors que $(X_0, \dots, X_n) \subsetneq k[X_0, \dots, X_n]$. On a de même une version projective du Nullstellensatz.

Théorème 3.14 (Nullstellensatz projectif). *Soit I un idéal de $k[X_0, \dots, X_n]$. On a alors*

$$\begin{aligned} V_p(I) = \emptyset &\Leftrightarrow \exists m \geq 0, (X_0, \dots, X_n)^m \subset I \\ &\Leftrightarrow (X_0, \dots, X_n) \subset \sqrt{I} \end{aligned}$$

Démonstration. On se ramène au cas affine. Remarquons que $V_p(I) = p(V(I) \setminus \{(0, \dots, 0)\})$. D'où

$$\begin{aligned} V_p(I) = \emptyset &\Leftrightarrow V(I) \subset \{(0, \dots, 0)\} = V(X_0, \dots, X_n) \\ &\Leftrightarrow (X_0, \dots, X_n) \subset \sqrt{I} \end{aligned}$$

□

Définition 3.15. Soit $W \subset \mathbb{P}_k^n$. On note $I_p(W)$ l'idéal homogène de $k[X_0, \dots, X_n]$ engendré par les polynômes homogènes de degré > 0 s'annulant sur W .

Comme dans le cas affine, on a $W = V_p(I_p(W))$ si et seulement si W est une variété algébrique projective et, pour un idéal homogène $I \subsetneq k[X_0, \dots, X_n]$, on a $\sqrt{I} = I_p(V_p(I))$.

Remarque 3.16. Remarquons que si $W = \emptyset$, alors par définition $I_p(W) = (X_0, \dots, X_n)$.

Définition 3.17. Une variété algébrique projective W est dite irréductible si $W = W_1 \cup W_2$ avec W_1 et W_2 des variétés algébriques projectives, on a $W = W_1$ ou $W = W_2$.

Proposition 3.18. Une variété algébrique projective $W \subset \mathbb{P}_k^n$ est irréductible si et seulement si $I_p(W)$ est un idéal premier. De plus, si $I \subsetneq k[X_0, \dots, X_n]$ est un idéal homogène premier, alors $V_p(I)$ est une variété algébrique projective irréductible.

Si W est une partie de $\mathbb{P}_k^n$, la variété algébrique projective $V_p(I_p(W))$ est appelée *adhérence de Zariski projective* de W .

Remarque 3.19. Soit $F \in k[X_0, \dots, X_n]$ un polynôme homogène de degré $d > 0$. Décomposons $F = F_1 \cdots F_r$ en produit de polynômes irréductibles. On vérifie facilement que tous les F_i sont homogènes de degrés > 0 . On a alors

$$V_p(F) = V_p(F_1) \cup \cdots \cup V_p(F_r)$$

Ainsi $V_p(F)$ est irréductible si et seulement si les F_i sont identiques à un scalaire près, autrement dit si et seulement si $F = aF_1^r$ pour un certain $a \in k^\times$. Dans ce cas on a $\sqrt{(F)} = (F_1)$.

3.6. Intersection avec une carte affine. Soit $F \in k[X_0, \dots, X_n]$ un polynôme homogène de degré $d > 0$. On plonge $\mathbb{A}_k^n$ dans $\mathbb{P}_k^n$ via $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : \dots : x_n)$. On pose

$$F_*(X_1, \dots, X_n) := F(1, X_1, \dots, X_n)$$

Réciproquement si $G \in k[X_1, \dots, X_n]$ est un polynôme non nul, on pose

$$G^*(X_0, \dots, X_n) := X_0^d G\left(\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_n}{X_0}\right)$$

où d désigne le degré total de G . Le polynôme G^* est alors homogène de degré d .

Les démonstrations des deux résultats qui suivent fournissent de bons exercices pour se familiariser avec la géométrie projective.

Proposition 3.20. *On a $V_p(F) \cap \mathbb{A}_k^n = V(F_*)$. De plus, si $V_p(F)$ est irréductible, alors $V_p(F) \cap \mathbb{A}_k^n$ est une variété algébrique affine irréductible.*

Proposition 3.21. *Soit $G \in k[X_1, \dots, X_n]$ un polynôme non nul. L'adhérence de Zariski projective de $V(G)$ est $V(G^*)$. Si de plus $V(G)$ est une variété affine irréductible, son adhérence de Zariski projective est une variété algébrique projective irréductible.*

Remarque 3.22. Il faut prendre garde au fait que si W est une variété algébrique projective, l'irréductibilité de la variété affine $W \cap \mathbb{A}_k^n$ n'implique pas l'irréductibilité de W . Par exemple si W est l'union $H \cup H_\infty$ de deux hyperplans où H_∞ est l'hyperplan à l'infini et si $H \neq H_\infty$, on a $W \cap \mathbb{A}_k^n = H \cap \mathbb{A}_k^n$ qui est irréductible alors que W ne l'est manifestement pas.

Par ailleurs, si $W = V(F, G) \subset \mathbb{A}_k^n$, il n'est pas toujours vrai que l'adhérence de Zariski projective de W coïncide avec $V_p(F^*, G^*)$.

Notons que l'image d'une partie algébrique projective par une homographie est encore une partie algébrique projective. Ainsi la nature algébrique d'une partie de l'espace projectif n'est pas affectée par un changement de repère projectif.