MAT 562 - exercices du cours 1

Exercice 1 Soit A un anneau commutatif unitaire. Soit I un idéal de A.

a) Montrer que I est premier si et seulement si $I \neq A$ et

$$\forall x, y \in A, \quad (xy \in I \Rightarrow x \in I \quad \text{ou} \quad y \in I)$$

b) Montrer que I est maximal si et seulement si $I \neq A$ et si pour tout idéal J tel que $I \subset J \subset A$ on a $J = I$ ou $J = A$.

Exercice 2 Soit k un corps. Montrer que les idéaux premiers de $k[X]$ sont l'idéal nul et les idéaux maximaux.

Exercice 3 Soit k un corps et soit $n \geqslant 1$. On fixe $(a_1, \ldots, a_n) \in k^n$. Montrer que l'idéal $(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$ de $k[X_1, \ldots, X_n]$ est maximal.

Exercice 4 a) Soit $f : A \to B$ un morphisme *surjectif* d'anneaux. Montrer que si I est un idéal de A alors $f(I)$ est un idéal de B. Est-ce toujours vrai si f est un morphisme d'anneaux non nécessairement surjectif ?

b) Soient I et J deux idéaux d'un anneau A. On note q_I le morphisme canonique $A \to A/I$ et on note $\overline{J} = q_I(J)$. Montrer que les anneaux $(A/I)/\overline{J}$ et $A/(I+J)$ sont isomorphes.

c) Montrer que les idéaux (2) et (3) ne sont pas premiers dans $\mathbb{Z}[\mathrm{i}\sqrt{5}]$ (on pourra commencer par prouver que $\mathbb{Z}[\mathrm{i}\sqrt{5}]$ est isomorphe à $\mathbb{Z}[X]/(X^2+5)$).

d) Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[\mathrm{i}\sqrt{5}]$ n'est pas factoriel (on pourra montrer que les éléments 2 et 3 sont irréductibles).

Exercice 5 Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux.

a) Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de B. Montrer que $f^{-1}(\mathfrak{p})$ est un idéal premier de A.

b) Soit k un corps. On suppose que A et B sont des k-algèbres de type fini (on rappelle qu'une k-algèbre de type fini est un anneau de la forme $k[X_1, \ldots, X_n]/I$ pour un idéal I). Montrer que si $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de B, alors $f^{-1}(\mathfrak{m})$ est un idéal maximal de A.

c) Donner un contre exemple à l'énoncé b) lorsque A et B ne sont pas des k-algèbres de type fini.

Exercice 6 Soit k un corps.

a) Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de $k[X,Y]$. Montrer que $\mathfrak{m}$ n'est pas principal.

b) Soit $f \in k[X,Y] \backslash k[X]$ un polynôme irréductible et soit $g \in k[X,Y]$. Montrer que si f divise g dans $k(X)[Y]$, alors f divise g dans $k[X,Y]$.

c) Soit f un élément irréductible de $k[X,Y]$ et soit $g \in k[X,Y]$. Montrer que si f ne divise pas g, alors on a $((f)+(g)) \cap k[X] \neq 0$.

d) Montrer que les idéaux premiers de $k[X,Y]$ sont de deux sortes : les idéaux principaux premiers et les idéaux maximaux.