MAT 562 - exercices du cours 2

Exercice 1 Soit k un corps algébriquement clos. Est-ce que les ensembles suivants sont des variétés algébriques affines dans k^2 ?

a) $\{(x, x) \in k^2,\ x \neq 0\}$

b) $k^2 \backslash \{(0, 0)\}$

Exercice 2 Soit k un corps algébriquement clos et soit

$$J = (X^2 + Y^2 - 1, Y - 1) \subset k[X, Y]$$

a) Déterminer l'ensemble $V(J)$.

b) Trouver une fonction $f \in I(V(J))$ telle que $f \notin J$.

c) Déterminer $I(V(J))$.

Exercice 3 Soit k un corps algébrique clos. Déterminer les composantes irréductibles des variétés algébriques suivantes ainsi que l'idéal annulateur de chacune des composantes.

a) $V(Y, Y^2 - XZ) \subset \mathbb{A}^3_k$;

b) $V(X(Y - X^2 + 1), Y(Y - X^2 + 1)) \subset \mathbb{A}^2_k$;

c) $V(X^2) \subset \mathbb{A}^2_k$;

d) $V(X^2 - YZ, XZ - X) \subset \mathbb{A}^3_k$.

Exercice 4 Montrer que le polynôme $P(X, Y) := Y^2 - X(X-1)(X+1) \in k[X, Y]$ est irréductible pour tout corps k.

Exercice 5 Soit k un corps algébriquement clos. Déterminer les idéaux annulateurs des variétés algébriques affines suivantes.

a) $V(X^2Y, (X - 1)(Y + 1)^2)$;

b) $V(Z - XY, Y^2 + XZ - X^2)$;

c) $V(XY^3 + X^3Y - X^2 + Y)$.

Exercice 6 a) Soit $V = V(Y - X^2)$. Montrer que l'anneau $k[V]$ est k-isomorphe à l'anneau des polynômes en une variable.

b) Soit $V = V(XY - 1)$. Montrer que l'anneau $k[V]$ n'est pas k-isomorphe à l'anneau des polynômes en une variable.

Exercice 7 Soit k un corps algébriquement clos et soit $V = V(I) \subset k^n$ une variété algébrique affine.

a) Montrer que toute partie irréductible de V est contenue dans une composante irréductible de V (on rappelle que l'on a défini les composantes irréductibles de V comme étant les parties algébriques irréductibles maximales de V).

b) Montrer que V a un nombre fini de composantes irréductibles.

Exercice 8 Soit $f : V \to W$ un morphisme entre deux variétés algébriques affines. Montrer que l'image par f d'une composante irréductible de V est contenue dans une composante irréductible de W.

Exercice 9 Soit k un corps algébriquement clos. Si $V \subset k^n$ et $W \subset k^m$ sont deux variétés algébriques affines, montrer que $V \times W \subset k^{n+m}$ est une variété algébrique affine. Déterminer l'idéal $I(V \times W)$ en fonction de $I(V)$ et $I(W)$.

Exercice 10 Soit k un corps algébriquement clos. Montrer que le polynôme det $\in k[X_{i,j},\ 1 \leqslant i, j \leqslant n]$ est irréductible (on pourra remarquer que toute matrice de déterminant nul est conjuguée à une matrice dont la première colonne est nulle).

Exercice 11 Soit k un corps algébriquement clos. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $M_n(k)$.

a) Montrer que $\mathcal{N}$ est une variété algébrique affine et que son idéal de définition est engendré par n éléments. Les expliciter lorsque $n = 2$ et $n = 3$.

b) Montrer que $\mathcal{N}$ est l'adhérence de Zariski de l'ensemble des matrices nilpotentes de rang $n - 1$.

c) Montrer que $\mathcal{N}$ est irréductible.