MAT 562 - exercices du cours 3

Exercice 1 Soit k un corps algébriquement clos. Soit $F(X,Y,Z) \in k[X,Y,Z]$ un polynôme homogène degré 2. Montrer que $V_p(F)$ est soit l'union de deux droites, éventuellement confondues, soit une conique irréductible, isomorphe à $V_p(XY + YZ + XZ)$.

Exercice 2 Soit k un corps algébriquement clos. Si $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$ est un polynôme non nul, on pose $F^*(X_0, \ldots, X_n) := X_0^d F(\frac{X_1}{X_0}, \ldots, \frac{X_n}{X_0})$ où d est le degré de F. Si I est un idéal de $k[X_1, \ldots, X_n]$, on note I^* l'idéal de $k[X_0, \ldots, X_n]$ engendré par les éléments F^* où F parcourt les éléments non nuls de I. On plonge $\mathbb{A}_k^n$ dans $\mathbb{P}_k^n$ via $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : \ldots : x_n)$. Montrer que l'adhérence de Zariski de $V(I)$ dans $\mathbb{P}_k^n$ est $V_p(I^*)$.

Exercice 3 Soit k un corps algébriquement clos. On note ϕ l'application de $\mathbb{A}_k^1$ vers $\mathbb{A}_k^3$ définie par $\phi(t) := (t, t^2, t^3)$. On note W l'image de ϕ.

a) Montrer que W est une partie algébrique de $\mathbb{A}_k^3$. Déterminer l'idéal $I(W)$. Montrer qu'il est engendré par deux éléments.

b) Déterminer l'adhérence de Zariski de W dans $\mathbb{P}_k^3$. Montrer que

$$I_p(W) = (XY - TZ, Y^2 - XZ, X^2 - YT) \subset k[T, X, Y, Z]$$

c) Montrer que $I_p(W)$ ne peut pas être engendré par deux éléments homogènes.

d) En déduire que si $J = (F_1, \ldots, F_r)$, alors il n'est pas toujours vrai que $J^* = (F_1^*, \ldots, F_r^*)$.

Exercice 4 Soit k un corps algébriquement clos. On considère l'application $\Phi_{n,m}$ de $\mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m$ vers $\mathbb{P}_k^{nm+n+m}$ définie par

$$((x_0, \ldots, x_n), (y_0, \ldots, y_m)) \mapsto (x_i y_j)_{0 \leqslant i \leqslant n, 0 \leqslant j \leqslant m}$$

Montrer que $\Phi_{n,m}$ induit une bijection de $\mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m$ sur une partie algébrique de $\mathbb{P}_k^{nm+n+m}$.

Exercice 5 Soit A un anneau et soient I et J deux idéaux de A tels que $I + J = A$. Montrer que $IJ = I \cap J$ et que le morphisme canonique de A vers $A/I \oplus A/J$ est un isomorphisme. Donner une interprétation géométrique de ce résultat lorsque $A = k[X_1, \ldots, X_n]$, $I = I(V)$ et $J = I(W)$.

Exercice 6 a) Soit I un idéal de $k[X_1, \dots, X_n]$ et $A = k[X_1, \dots, X_n]/I$. Montrer que l'intersection des idéaux maximaux de A est exactement l'ensemble des éléments nilpotents de A.

b) Soit A une k-algèbre de *dimension* finie sur k. Montrer que A possède un nombre fini d'idéaux maximaux (on pourra remarquer que si le produit de deux idéaux I et J est contenu dans un idéal premier $\mathfrak{p}$ alors $I \subset \mathfrak{p}$ ou $J \subset \mathfrak{p}$). Si $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de A, montrer qu'il existe un unique entier $e = e_{\mathfrak{m}} \geqslant 1$ tel que $\mathfrak{m}^e = \mathfrak{m}^{e+1}$ et $\mathfrak{m}^{e-1} \neq \mathfrak{m}^e$.

c) Soient $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_r$ les idéaux maximaux de A. Montrer que $\prod_{i=1}^r \mathfrak{m}_i^{e_{\mathfrak{m}_i}} = 0$.

d) Montrer que le morphisme canonique $A \to \bigoplus_{i=1}^r A/\mathfrak{m}_i^{e_{\mathfrak{m}_i}}$ est un isomorphisme.

Exercice 7 Soient F et G deux éléments non nuls et premiers entre eux de $k[X, Y]$. Posons $d_1 = \deg F$ et $d_2 = \deg G$ les degrés totaux de F et G.

a) Soit $d \geqslant 0$ et soit $k[X, Y]_d$ l'ensemble des polynômes de $k[X, Y]$ de degré total inférieur ou égal à d. Calculer la dimension du k-espace vectoriel $k[X, Y]_d$.

b) Soit $d \geqslant d_1 + d_2$. On note $W_d \subset k[X, Y]_d$ l'ensemble des éléments de la forme $AF + BG$ où $\deg A \leqslant d - d_1$ et $\deg B \leqslant d - d_2$. Calculer la dimension de W_d et en conclure que $\dim_k k[X, Y]/(F, G) \leqslant d_1 d_2$.

c) On note F_{d_1} et G_{d_2} les termes dominants de F et G. Montrer que si $V(F)$ et $V(G)$ ne s'intersectent pas à l'infini, les polynômes F_{d_1} et G_{d_2} sont premiers entre eux.

d) Montrer que si $V(F)$ et $V(G)$ ne s'intersectent pas à l'infini, on a

$$\dim_k k[X, Y]/(F, G) \geqslant d_1 d_2$$

Exercice 8 Soit p un nombre premier et soit q une puissance de p. On note $\mathbb{F}_q$ le corps fini à q éléments. Si $n \geqslant 1$, calculer le cardinal de l'ensemble $\mathbb{P}^n_{\mathbb{F}_q}$.

Exercice 9 Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique p, où p est un nombre premier. Soit $I \subset k[X_1, \dots, X_n]$ un idéal engendré par des éléments de $\mathbb{F}_p[X_1, \dots, X_n]$. Montrer que l'application $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1^p, \dots, x_n^p)$ induit une application polynomiale bijective de $V(I)$ dans $V(I)$ mais que c'est un isomorphisme si et seulement si $V(I)$ est fini.