MAT 562 - exercices du cours 4

Dans tous les exercices, k désigne un corps algébriquement clos de caractéristique différente de 2 et 3.

Exercice 1 a) Soit $F \in k[X_0, \ldots, X_n]$ un polynôme homogène de degré $d \geqslant 1$. Démontrer l'identité d'Euler

$$dF = \sum_{i=0}^{n} X_i \frac{\partial F}{\partial X_i}$$

b) Soit C une courbe algébrique plane. Soit $F \in k[X, Y, Z]$ tel que $I_p(C) = (F)$. Si la caractéristique de k ne divise pas le degré de F, montrer que

$$C^{sing} = V_p\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right) \cap V_p\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right) \cap V_p\left(\frac{\partial F}{\partial Z}\right)$$

Exercice 2 Montrer que la cubique d'équation $Y^2Z = X^3 + aXZ^2 + bZ^3$ est lisse si et seulement si $4a^3 + 27b^2 \neq 0$.

Exercice 3 Soit $P \in k[X]$ un polynôme simplement scindé de degré $d \geqslant 3$. Soit W l'adhérence de Zariski de $V(Y^2 - P(X)) \subset \mathbb{A}_k^2$ dans $\mathbb{P}_k^2$. Déterminer les points lisses de W.

Exercice 4 Soit E une courbe elliptique définie sur k d'équation de Weierstrass $Y^2Z = X^3 + aXZ^2 + bZ^3$, d'élément neutre $0 = (0 : 1 : 0)$. Montrer que l'ensemble

$$\{P \in E,\ [2]P = 0\}$$

est de cardinal 4. En déduire qu'il s'agit d'un sous-groupe de E isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 5 Soit E une courbe elliptique définie sur k d'équation de Weierstrass $Y^2Z = X^3 + aXZ^2 + bZ^3$, d'élément neutre $0 = (0 : 1 : 0)$. Soit $P = (x, y) \in E \smallsetminus \{0\}$.

a) Calculer les coordonnées du point $[2]P$.

b) En déduire que l'application $P \mapsto [2]P$ de E dans E est surjective.

Exercice 6 Montrer que la courbe projective d'équation $X^3 + Y^3 = Z^3$ est lisse. Expliciter la loi de groupe en choisissant pour élément neutre le point $(1 : 0 : 1)$.

Exercice 7 Soit C une courbe algébrique plane lisse. Montrer que les composantes irréductibles de C sont deux à deux disjointes. En déduire qu'elle est irréductible.

Exercice 8 (Points d'inflexion) Soit C une courbe algébrique plane lisse définie sur k. Un point P de C est un *point d'inflexion* si et seulement si la multiplicité d'intersection en P de C avec sa tangente en P est $\geqslant 3$.

a) Montrer qu'une conique lisse n'a pas de point d'inflexion.

b) Posons $I_p(C) = (F)$. Soit $H(X, Y, Z)$ le déterminant de la matrice

$$M(X,Y,Z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial XY} & \frac{\partial^2 F}{\partial XZ} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial XY} & \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial YZ} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial XZ} & \frac{\partial^2 F}{\partial YZ} & \frac{\partial^2 F}{\partial Z^2} \end{pmatrix}$$

Soit d le degré de C. Montrer que

$$Z^2 H(X,Y,Z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial XY} & (d-1)\frac{\partial F}{\partial X} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial XY} & \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} & (d-1)\frac{\partial F}{\partial Y} \\ (d-1)\frac{\partial F}{\partial X} & (d-1)\frac{\partial F}{\partial Y} & d(d-1)F(X,Y,Z) \end{vmatrix}$$

(on pourra utiliser l'identité d'Euler prouvée dans l'exercice 1).

c) Si k est de caractéristique 0, montrer que P est un point d'inflexion de C si et seulement si $H(P) = 0$.

d) En déduire qu'une courbe plane lisse de degré $d \geqslant 3$ a toujours des points d'inflexion.

e) Supposons que C est une cubique irréductible. Montrer que P est un point d'inflexion de C si et seulement si P est le seul point d'intersection de C avec sa tangente en P.

f) Soit E une courbe elliptique. Supposons que 0 est un point d'inflexion de E. Montrer que P est un point d'inflexion de E si et seulement si $[3]P = 0$ et que le nombre de points d'inflexion de E est égal à 1, 3 ou 9.

g) Montrer que le nombre de points d'inflexion d'une courbe elliptique E est exactement égal à 9.